Μ.Φ. 15/11/2016 ①

[Για το προηγούμενο π.χ.]: Προφανώς, θα πρέπει όλες οι συναρτήσεις να έχουν την ιδιότητα $g(x)|_{x=0} = 0$, αλλά εδώ $g(x)|_{x=0} = 1$, άρα δεν υπάρχει $f(x), x \in [0,1]$.]

Ορισμός
Για δύο τελεστές που δε μετατίθενται ορίζουμε το **μεταθέτη** των A και B ως: $[A,B] = AB - BA$, με τις ιδιότητες:

α) $[A,B] = -[B,A]$
β) $AB = BA \Leftrightarrow [A,B] = 0$.

π.χ. Να βρεθεί ο μεταθέτης των τελεστών $A = \frac{d}{dx}$, $B = x$.

Παρατήρηση: Οι τελεστές ορίζονται μέσω της δράσης τους.

Δηλαδή: $[A,B]|f\rangle = (AB - BA)|f\rangle = AB|f\rangle - BA|f\rangle = \frac{d}{dx}(xf(x)) - x\frac{d}{dx}f(x)$

$= f(x) + x\frac{df(x)}{dx} - x\frac{df(x)}{dx} = f(x) = |f\rangle$.

Άρα $[A,B]|f\rangle = |f\rangle$, δηλαδή $[A,B] = I$, $\forall |f\rangle \in S$ ή $\left[\frac{d}{dx}, x\right] = I$.

π.χ. Θεωρούμε τον δ.χ. S, τα πολυώνυμα βαθμού μικρότερα ή ίσου με το N και την απεικόνιση $x^n \to nx^{n-1} + ax^n$, $a \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$
Να βρεθεί ο τελεστής αυτής της απεικόνισης.

$\longrightarrow$ $Ax^n = \left(\frac{d}{dx} + a\right)x^n = nx^{n-1} + ax^n$, άρα ο $A = \frac{d}{dx} + a$.

Όμοια για $x^n \to nx^n$, $x^n \to \left(\frac{1}{n} - 1\right)x^n$.

• Γραμμικοί Τελεστές

Ορισμός: Ένας τελεστής σε ένα δ.χ. S, λέγεται γραμμικός αν:
(a) $A(a|f\rangle) = aA|f\rangle$, $a \in \mathbb{C}$, $|f\rangle \in S$.
(b) $A(|f\rangle + |g\rangle) = A|f\rangle + A|g\rangle$, $|f\rangle, |g\rangle \in S$.

Οι δύο ιδιότητες μπορούν να γραφούν ως μία:
$A(a|f\rangle + b|g\rangle) = aA|f\rangle + bA|g\rangle$, όπου $a, b \in \mathbb{C}$ και $|f\rangle, |g\rangle \in S$.

π.χ. 1 Ο τελεστής της παραγώγισης, $D = \frac{d}{dx}$, είναι γραμμικός τελεστής;;
$\longrightarrow$ $|f\rangle = f(x)$, $|g\rangle = g(x)$, $a, b \in \mathbb{R}$.

$D(a|f\rangle + b|g\rangle) = \frac{d}{dx}(af(x) + bg(x)) = \frac{d}{dx}(af(x)) + \frac{d}{dx}(bg(x)) =$
$a\frac{df(x)}{dx} + b\frac{dg(x)}{dx} = aD|f\rangle + bD|g\rangle$.

<u>Συμπέρασμα</u>: Ο τελεστής της παραγώγισης είναι γραμμικός τελεστής.

<u>π.χ.(2)</u> Ο τελεστής A, με $A|f\rangle = Af(x) = f^2(x)$, είναι μη γραμμικός τελεστής.

<u>Ιδιότητες</u>: Οι γραμμικοί τελεστές έχουν τις εξής ιδιότητες:

1) Αν A και B είναι γραμμικοί τελεστές τότε και ο $C = A+B$ είναι γραμμικός τελεστής.

<u>Αποδ.</u>

$$
\begin{aligned}
C(a|f\rangle + b|g\rangle) &= (A+B)(a|f\rangle + b|g\rangle) = A(a|f\rangle + b|g\rangle) + B(a|f\rangle + b|g\rangle) \\
&= A(a|f\rangle) + A(b|g\rangle) + B(a|f\rangle) + B(b|g\rangle) \\
&= aA|f\rangle + bA|g\rangle + aB|f\rangle + bB|g\rangle \\
&= a(A+B)|f\rangle + b(A+B)|g\rangle = aC|f\rangle + bC|g\rangle,
\end{aligned}
$$

άρα C, γραμμικός τελεστής.

2) Αν A είναι γραμμικός τελεστής τότε και ο aA, $a \in \mathbb{C}$ είναι γραμμικός τελεστής.

3) Αν A και B είναι γραμμικοί τελεστές, τότε και ο $C = AB$ είναι γραμμικός τελεστής.

<u>Αποδ.</u>

$$
C(a|f\rangle + b|g\rangle) = AB(a|f\rangle + b|g\rangle) = A(aB|f\rangle + bB|g\rangle) =
$$

$$
a(AB|f\rangle) + b(AB|g\rangle) = aC|f\rangle + bC|g\rangle.
$$

4) Για γραμμικούς τελεστές ισχύει ότι $A(B+C) = AB + AC$.

<u>π.χ.1</u> Για γραμμικούς τελεστές ισχύει ότι (να δειχθεί) $A(BC) = (AB)C$.

<u>π.χ.2</u> Ν.δ.ο. $[[A,B],C] + [[B,C],A] + [[C,A],B] = 0$.

$\to [AB-BA, C] = (AB-BA)C - C(AB-BA) = ABC - BAC - CAB + CBA$.

Όμοια και για τα υπόλοιπα.

• Προσαρτημένοι (adjoint) τελεστές.

<u>Ορισμός</u>: Για έναν τελεστή A, σ' ένα δ.χ. S, ορίζεται ο τελεστής A^+ και καλείται **προσαρτημένος** του A, τέτοιος ώστε:

$$
\langle A^+ g | f\rangle = \langle g | A f\rangle.
$$

Παρατήρηση: Ως προς τον συμβολισμό, έχουμε ότι $A|f\rangle = |g\rangle$.
$|Af\rangle$ είναι διάνυσμα, επίσης το $\langle A^+g|$ είναι διάνυσμα.
$|Af\rangle = A|f\rangle$.

Γνωρίζουμε ότι: $\langle A^+g|f\rangle = \langle f|Ag\rangle^* = \langle f|A|g\rangle^*$.

Δηλαδή ισχύει ότι: $\langle g|Af\rangle = \langle f|A^+g\rangle^*$ και $\langle f|A^+g\rangle = \langle g|Af\rangle^*$

Επίσης, $(A^+)^+ = A$

Αποδ.

$\langle g|(A^+)^+|f\rangle = \langle f|A^+g\rangle^* = \langle g|Af\rangle$, Πράγματι ο $(A^+)^+ = A$.

- Αυτοπροσαρτημένοι Τελεστές

Ορισμός: Ένας τελεστής λέγεται **αυτοπροσαρτημένος** (self-adjoint) ή **Ερμιτιανός** (hermitian) αν $A^+ = A$.
Τότε $A^+ = A \Leftrightarrow \langle g|Af\rangle = \langle Ag|f\rangle$.

Ιδιότητες:

1) $(A+B)^+ = A^+ + B^+$

Αποδ.

$$\langle g|(A+B)^+|f\rangle = \langle (A+B)f|g\rangle^* = \langle Af|g\rangle^* + \langle Bf|g\rangle^*$$
$$= \langle g|A^+f\rangle + \langle g|B^+f\rangle = \langle g|(A^+ + B^+)|f\rangle.$$

Άρα $(A+B)^+ = A^+ + B^+$.

2) $(AB)^+ = B^+A^+$

Αποδ.

$$\langle g|(AB)^+f\rangle = \langle ABf|g\rangle^* = \langle A(Bf)|g\rangle^* = \langle Bf|A^+g\rangle^* =$$
$$= \langle f|B^+A^+g\rangle^* = \langle g|B^+A^+f\rangle$$

Άρα $(AB)^+ = B^+A^+$.

3) Ο A^+ είναι γραμμικός τελεστής.

Αποδ.

δ.δ.ο. $\langle g|A^+(a|f_1\rangle + b|f_2\rangle) = a\langle g|A^+|f_1\rangle + b\langle g|A^+|f_2\rangle$.

Έχουμε:

$$\langle g|A^+(a|f_1\rangle + b|f_2\rangle) = (a|f_1\rangle + b|f_2\rangle)A|g\rangle^* = \langle af_1|Ag\rangle^* + \langle bf_2|Ag\rangle^*$$
$$= \langle g|A^+|af_1\rangle + \langle g|A^+|bf_2\rangle = a\langle g|A^+f_1\rangle + b\langle g|A^+f_2\rangle$$

4) Ο A^+ είναι μοναδικός.

Αποδ.

Έστω ότι δεν είναι μοναδικός. $B = A_1^+ - A_2^+$, τότε
$\langle g|Bf\rangle = \langle g|(A_1^+ - A_2^+)f\rangle = \langle g|A_1^+f\rangle - \langle g|A_2^+f\rangle = \langle Ag|f\rangle - \langle Ag|f\rangle = 0$.
Δηλαδή: $B = 0 \Rightarrow A_1^+ - A_2^+ = 0 \Rightarrow A_1^+ = A_2^+$, άρα A^+ μοναδικός.

Μ.Φ. 15/11/2016 (3)

Ορισμός: **Φραγμένος**, λέγεται ο τελεστής, L, για τον οποίο υπάρχει σταθερά, C, τ.ω. $\|Lf\|^2 = \langle Lf|Lf\rangle < C\cdot\langle f|f\rangle = C\|f\|^2$, $(c\in\mathbb{C})$

Π.Χ.1 Έστω S ο χώρος των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στο [0,1]. Αν $A=\int_0^1 dx$, ν.δ.ο. ο $A^+=A$.

$\longrightarrow$ $A=\int_0^1 dx$, $|f\rangle = f(x)$, $\langle g| = g^*(x)$.

Δη. $A|f\rangle = \int_0^1 f(t)dt$, $\langle g|f\rangle = \int_0^1 g^*(x)f(x)dx$

$$\langle g|A^+f\rangle = \langle g|A^+|f\rangle = \langle f|A|g\rangle^* = \left[\int_0^1 f^*(x)dx\int_0^1 g(t)dt\right]^*$$

$$=\int_0^1 g^*(t)dt\underbrace{\int_0^1 f(x)dx}_{A|f\rangle} = \langle g|Af\rangle.$$

Οπότε, $A^+=A$, δηλαδή ο A είναι αυτοπροσαρτημένος.

Π.Χ.2 Στο χώρο των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων συναρτήσεων, στο [a,b] να βρεθεί ο προσαρτημένος του: $L=k\frac{d}{dx}$, $k\in\mathbb{C}$.

$\longrightarrow$ $\langle g|f\rangle = \int_a^b g^*(x)f(x)dx$.

Τότε: $\langle g|L^+f\rangle = \langle f|Lg\rangle^* = \left[\int_a^b f^*(x)\cdot k\cdot\frac{dg(x)}{dx}dx\right]^* = \int_a^b f(x)k^*\frac{dg^*(x)}{dx}dx$

$$= k^* f(x)g^*(x)\Big|_a^b - \int_a^b [kg(x)]^*\frac{df}{dx}dx = k^*f(x)g^*(x)\Big|_a^b - \int_a^b g^*(x)k^*\frac{df(x)}{dx}dx$$

$$= k^*f(x)g(x)\Big|_a^b + \underbrace{\int_a^b g^*(x)\underbrace{\left(-k^*\frac{df(x)}{dx}\right)}_{=L^+}dx}_{\langle g|L^+f\rangle}$$

Αν ισχύει ότι $k^*\cdot f(x)\cdot g^*(x)\Big|_a^b = 0 \Leftrightarrow f(b)g^*(b) = f(a)g^*(a)$, τότε $L^+=-k^*\frac{d}{dx}$

Άσκηση Να βρεθεί ο προσαρτημένος στο προηγούμενο παράδειγμα αν $k=k(x)$. Επίσης, ισχύει η συνθήκη: $f(b)g^*(b)=f(a)g^*(a)$ και λέγεται <u>προσαρτημένη συνοριακή συνθήκη</u>. Γενικά, μπορεί να υπάρχουν παραπάνω από μία τέτοιες συνθήκες.

Θεώρημα: Για κάθε φραγμένο γραμμικό τελεστή, L, υπάρχει ο προσαρτημένος τελεστής, L^+.